Ecuación de la Frontera de Posibilidades de Producción utilizando la Función Cobb-Douglas
(Nota didáctica)

Héctor Arango
Centro de Investigaciones Económicas -CIE-
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Antioquia

Introducción

El primer encuentro de los estudiantes con la economía generalmente involucra el análisis de las Fronteras de Posibilidades de Producción como un instrumento analítico útil para ilustrar , en un escenario tecnológico y de disponibilidad de recursos, las diferentes canastas de mercancías y de servicios entre las cuales el sistema económico como productor puede elegir independientemente del criterio que oriente su selección a su vez, las fronteras permiten abordar tópicos tan interesantes como el análisis de la empresa multiproducto. Finalmente no es posible adentrarse al estudio del comercio internacional, el equilibrio autárquico y las ventajas del comercio, sin esta versátil herramienta.

Lo anterior justifica la presente nota. Se espera que contribuya a un conocimiento más apropiado de las curvas de transformación y la forma de utilizarlas.

I. Primera parte

A. Optimos paretianos

En los cursos de microeconomía generalmente se plantean, entre otros, estos dos problemas:

1. Un empresario inicia su proceso de producción bajo las siguientes condiciones: primera, es conocedor de los precios de mercado a los cuales puede contratar los recursos utilizados pero sin ningún control sobre ellos; segunda, conoce la función de producción, del tipo Cobb-Douglas, bajo la cual desea definir la combinación asequible a su presupuesto con el fin de alcanzar el mayor nivel de producción, en una unidad de tiempo determinada. El problema se plantearía formalmente asi:

$$\text{MAX: } Q = A*N^{\alpha}*K^{(1-\alpha)}$$

$$\text{S.A: } M = P_N*N + P_k*K$$

Donde:

Q = Nivel de producción

N = Trabajo (servicios laborales)

K = Capital

M = Presupuesto a invertir

P_N = Precio de la jornada laboral

P_k = Precio (alquiler) de una unidad de capital

$A = 1$

Además: α, M, P_N, P_k están dados.

En este contexto el lagrangiano sería:

$$L = N^{\alpha}*K^{(1-\alpha)} - \lambda[P_N*N + P_k*K - M]$$

mientras las condiciones de primer orden son:

$$\delta L/\delta N = \alpha(K/N)^{(1-\alpha)} - \lambda^* P_N = 0 \qquad (1)$$

donde:

$$\alpha(K/N)^{(1-\alpha)} = \lambda^* P_N$$

$$\delta L/\delta K = (1-\alpha)(N/K)^{\alpha} - \lambda^* P_K = 0 \qquad (2)$$

$$\text{y} \quad (1-\alpha)(N/K)^{\alpha} = \lambda^* P_K$$

$$\delta L/\delta\lambda = P_N^* N + P_K^* K - M = 0 \qquad (3)$$

$$M = P_N^* N + P_K^* K$$

La solucion lleva a las conocidas *Demandas Marshallianas* de factores:

$$N = \alpha^* M / P_N \qquad (4)$$

$$K = (1-\alpha)^* M / P_k \qquad (5)$$

las cuales podrían "leerse" como los pares (N, K) que permiten maximizar Q con un presupuesto dado; es decir, para ellos se cumple la igualdad entre las pendientes de isocuantas e isocostos.

Entonces (4) y (5) son la respuesta al primer problema.

2. El segundo problema es el siguiente:

Una economía dispone de una oferta de factores, N y K, compuesta por las "dotaciones iniciales" que de ellos poseen las dos únicas empresas de dicha economía, es decir:

$$N = W^A{}_N + W^I{}_N \qquad (6)$$

$$K = W^A{}_K + W^I{}_K \qquad (7)$$

Donde:

(W^A_N, W^A_K) y (W^I_N, W^I_K) son las dotaciones iniciales de factores de la empresa agrícola (A) y de la empresa industrial (I).

Debe entenderse que W es la cantidad del factor disponible en cada una de las empresas "en un comienzo" y al valorar estas dotaciones tendríamos una medida del presupuesto inicial de las empresas, así:

$$M_A = P_N{*}W^A_N + P_K{*}W^A_K \tag{7a}$$

$$M_I = P_N{*}W^I_N + P_K{*}W^I_K \tag{7b}$$

Además, debe ser claro que aunque W define la cantidad de factor de la que puede disponer la empresa en un momento inicial (comienzo), **no es necesariamente** la cantidad del factor que la empresa deseará utilizar, puesto que está definida por las demandas marshallianas.

Es decir, y es el centro del segundo problema a tener en cuenta, es posible que la dotación inicial de factores no corresponda a una asignación óptimo paretiana: en la Caja de Edgeworth-Bowley significa que las isocuantas de agricultura e industria se cortan en el punto de dotación (véase Gráfico 1) W, lo que garantiza que es posible deslizarse sobre una de ellas, reasignando los factores para alcanzar una producción mayor de A o de I, sin modificar la producción de I o de A, hasta alcanzar el óptimo paretiano donde las isocuantas son tangentes.

Alternativamente, las empresas se pueden desplazar hacia el interior del área delimitada por las dos isocuantas, conocida como espacio de ventajas mutuas, y en la medida en que intercambian (reasignan) factores la producción de ambas crece hasta alcanzar el óptimo paretiano donde las isocuantas son tangentes.

El conocedor de la Caja de Edgeworth-Bowley sabe que existen infinitos puntos de tangencia en su interior y que la línea que los recoge recibe el nombre de *línea de Pareto* o *línea de Contrato*, en este caso $O_A\,O_I$ (véase Gráfico 2).

Gráfico 1 El espacio de ventajas mutuas

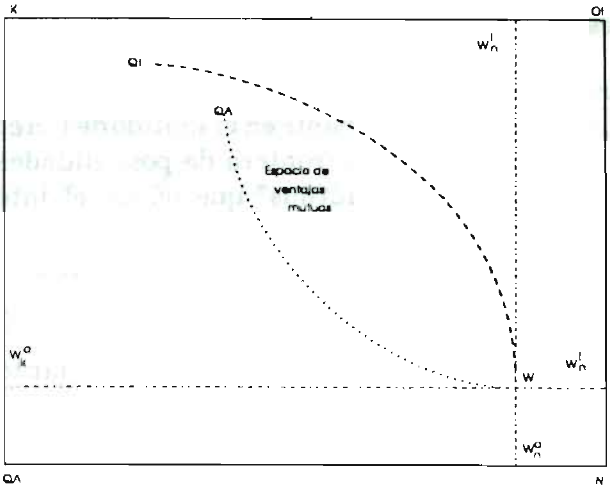
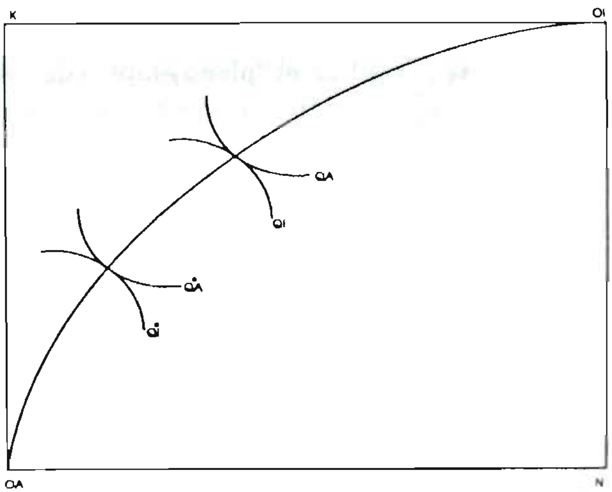


Gráfico 2 La línea de Pareto



La solución al segundo problema consiste en responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la ecuación de la línea de Pareto?

b. ¿A qué razón se deben **intercambiar** los factores para que, partiendo de una asignación "inicial" no eficiente en el sentido de Pareto, las empresas puedan alcanzar un punto de la frontera de posibilidades de producción disfrutando de las "ventajas mutuas" que ofrece el intercambio? Esta segunda pregunta podría sintetizarse en ¿cuáles son los precios relativos de los factores que garantizan el óptimo desde el punto de vista de Pareto? Veamos.

Para dar solución a la primera pregunta podría plantearse:

$$\text{MAX:} \quad Q_A = N^{\alpha}_A * K^{\alpha(1-\alpha)}_A$$

$$\text{S.A:} \quad Q_I = N^{b}_I * K^{(1-b)}_I$$

$$N = N_A + N_I$$

$$K = K_A + K_I$$

con estas restricciones se garantiza el "pleno empleo de los recursos". Con el fin de facilitar el manejo pueden ser incorporadas en la primera. El problema quedaría:

$$\text{MAX:} \quad Q_A = N^{\alpha}_A * K^{(1-\alpha)}_A$$

$$\text{S.A:} \quad Q_I = (N - N_A)^{b} * (K - K_A)^{(1-b)}$$

y el lagrangiano:

$$L = N^{\alpha}_A * K^{(1-\alpha)}_A - \lambda[(N - N_A)^{b} * (K - K_A)^{(1-b)} - Q_I];$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\delta L/\delta N_A = \alpha * (K_A/N_A)^{(1-\alpha)} + \lambda * b * [(K - K_A)/(N - N_A)]^{(1-b)} = 0$$

$$\alpha^*(K_A/N_A)^{(1-\alpha)} = -\lambda^*b^*[(K-K_A)/(N-N_A)]^{(1-b)} \quad (8)$$

y para lo que se busca sólo se necesita:

$$\delta L/\delta K_A = (1-\alpha)^*(N_A/K_A)^{\alpha} + \lambda^*(1-b)^*[(N-N_A)/(K-K_A)]^{b} = 0$$

$$(1-\alpha)^*(N_A/K_A)^{\alpha} = -\lambda^*(1-b)^*[(N-N_A)/(K-K_A)]^{b} \quad (9)$$

Si se divide (8) entre (9) y se cancela •, queda

$$\frac{\alpha^*(K_A/N_A)^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^*(N_A/K_A)^{\alpha}} = \frac{b^*[(K-K_A)/(N-N_A)]^{(1-b)}}{(1-b)^*[(N-N_A)/(K-K_A)]^{b}} \quad (10)$$

Ahora es claro que (10) no es más que:

$$(\delta Q_A/\delta N_A) / (\delta Q_A/\delta K_A) = (\delta Q_I/\delta N_I) / (\delta Q_I/\delta K_I)$$

dado que cualquier variación en N_A implica un cambio idéntico pero de signo contrario en $N_I = N - N_A$; algo similar se puede decir de las alteraciones en K_A y K_I; por tanto (10) no es más que:

Producto Marginal de N en agricultura / Producto Marginal de K en agricultura = Producto Marginal de N en la industria / Producto Marginal de K en la industria.

O sea $RMST^{A}_{K\text{-}N} = RMST^{I}_{K\text{-}N}$ e indica que la relación marginal de sustitución técnica es igual para ambos sectores.

Esta situación garantiza la tangencia de las isocuantas de las dos actividades de la economía, caraterística de las asignaciones óptimas en el sentido de Pareto.

Entonces, simplificando (10) y despejando K_A queda:

$$K_A = b^*(1-\alpha)^*K^*N_A / [\alpha^*(1-b)^*N - (\alpha - b)^*N_A] \quad (11)$$

de donde (11) es la respuesta a la pregunta a), es decir, es la línea de Pareto o línea de Contrato. Observe que por la explicación de (10), la ecuación (11) es el conjunto de combinaciones (N_A, K_A) y entonces (N_I, K_I) para las cuales las isocuantas agrícolas (A) son tangentes a las industriales (I).

Para responder el interrogante b) planteado anteriormente basta con remplazar en (11) N_A y K_A por sus expresiones equivalentes en demandas marshallianas de las ecuaciones (4) y (5) y recordar la definición del presupuesto de los empresarios expresada en las ecuaciones (7a) y (7b) y reemplazarlas en las demandas marshallianas, es decir, (11) queda:

$$\frac{(1-\alpha)*[P_N*W^A{}_N+P_K*W^A{}_K]}{P_K} = \frac{b*(1-\alpha)*K*[\alpha*(P_N*W^A{}_N+P_K*W^A{}_K)/P_N]}{\{\alpha*(1-b)*N-(\alpha-b)*[\alpha(P_N*W^A{}_N+W^A{}_K)/P_N]\}}$$

Despejando la razón P_N / P_K queda:

$$P_N / P_K = [b*K+(\alpha-b)*W^A{}_K] / [(1-b)*N-(\alpha-b)*W^A{}_N] \qquad (12)$$

Esta fórmula puede ser organizada y quedaría así:

$$P_N / P_K = [b*(K - W^A{}_K) + \alpha*W^A{}_K] / [(1-b)*N-(\alpha - b)*W^A{}_N] \qquad (12a)$$

con la garantía de: $P_N/P_K > 0$.

Un nuevo interrogante asalta aquí ¿cómo quedan (11) y (12) si se supone la misma productividad de los factores en los dos sectores, es decir, si una unidad de N (K) rinde igual en la agricultura y en la industria?

De hecho nos proponen que $\alpha = b$.

$$K_A = (K/N)*N_A \qquad (11*)$$

cuya solución es la línea de Contrato.

La primera conclusión de este resultado es obvia. En este caso, la línea de Pareto no sólo es una recta sino que **coincide con la diagonal** de la

Caja -recuerde las dimensiones de ésta-. Además, y como es evidente, en todos los puntos de la línea de Pareto hay una única razón K/ N, despejando (11*)

$K_A/N_A = K_I/N_I = K/N$

lo que garantiza, si se recuerdan las características de las funciones homogéneas de grado uno, que al moverse de un punto a otro de la línea de Pareto (y entonces de la frontera), la disminución en la producción de un bien se compensa con un incremento en la producción del otro, el mismo en cada punto de la frontera.

Como se ve, esta situación lleva a una frontera de posibilidades de producción lineal con una pendiente constante -TMT = Tasa Marginal de Transformación- e implica un costo de oportunidad constante como planteaba la Escuela Clásica, que conlleva la plena especialización en la presencia de comercio internacional, a más de sugerir que los precios autárquicos son determinados únicamente por las condiciones de oferta, sin que la demanda intervenga en absoluto.

Y (12) (con $\alpha = b$) quedaría

$$P_N / P_K = b^*k / (1-b)^*N \qquad (12^*)$$

lo cual sugiere que sólo hay una razón de precio que permite conciliar los intereses de los empresarios para llegar a una asignación óptima paretiana **partiendo de una asignación inicial arbitraria no eficiente, a través del intercambio**; es decir, mientras en (12) las dotaciones iniciales y, por tanto, el presupuesto del empresario afectan claramente la razón de precios de los factores, en (12*) estas dotaciones no juegan ningún papel quitándole asi su función a la demanda y nuevamente los precios, a los que se tasan relativamente los factores, dependen exclusivamente de las condiciones de oferta.

B. Dos tipos de frontera

Ahora se construirán dos tipos de fronteras:

1. Primer tipo

La que se puede extraer de una línea de Pareto con las características de (11*) bajo el supuesto de $\alpha = b$, llamada frontera lineal

$$K_A = (K/N)^*N_A \qquad (11^*)$$

Supongamos las dotaciones de recusos en este país así:

$K = 2000$

$N = 4000$

Y las funciones de producción en los dos sectores de la economía:

$Q_A = N^{0.6}{}_A{}^*K^{0.4}{}_A$

$Q_I = N^{0.6}{}_I{}^*K^{0.4}{}_I$

Sugiriendo la no especialización de los recursos, es decir, estos rinden igual en ambos sectores, la línea de Pareto (11*) quedaría:

$K_A = 0.5^*N_A$

Ahora sólo queda asignar valores a N_A y despejar K_A; los valores de N_I y K_I quedarán determinados por defecto como:

$N_I = 4000 - N_A$ y $K_I = 2000 - K_A$.

Por ser ya conocidas las asignaciones de Pareto eficientes (N_A, K_A) y (N_I, K_I) se reemplazan en las funciones de producción y se van obteniendo los puntos, combinaciones de bienes, que conforman la frontera de posibilidades de producción. Obviamente, es ventajoso evaluar las combinaciones extremas en la línea de Pareto cuando una de las empresas está utilizando la totalidad de los recursos y la producción de la otra es entonces nula porque así se conocerán los interceptos, o extremos de la frontera de posibilidades de producción. Esto se puede ver así:

Punto 1 $Q_A(N, K) = 3031.4331$

$Q_I(0, 0) = 0$

Punto 2 $Q_A(0, 0) = 0$

$Q_I(N, K) = 3031.4331$

Punto 3 $Q_A(3000, 1500) = 2273.5748$

$Q_I(1000, 500) = 757.85828$

Así se podrían hallar cuántos puntos interesen y, a su vez, observar siempre que la suma **aritmética** QA + QI da un valor fijo de 3031.4331.[1] Siempre se podrá comprobar que la ecuación para definir la frontera es:

$$Q_I = 3031.4331 - Q_A$$

Y en forma genérica.

$$Q_I = Q_I(N,K) - Q_A \qquad (15)$$

Donde:

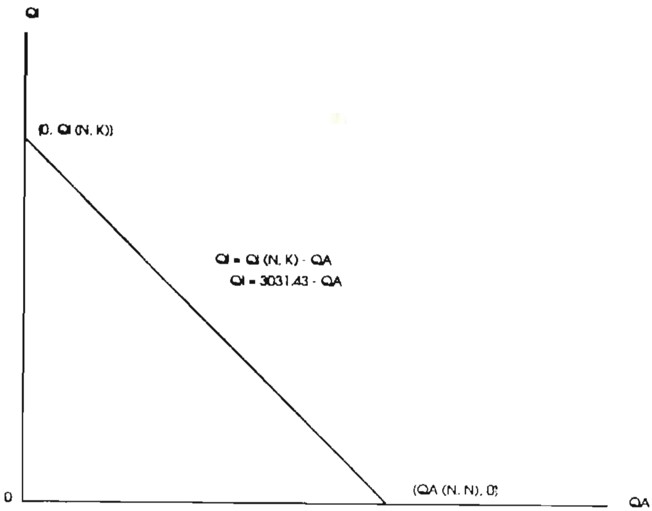
$Q_I(N, K)$ es el máximo Q_I en las condiciones actuales, es decir, el Q_I alcanzado, cuando a tal sector se destina la totalidad de los recursos.

$$TMT = \delta Q_I/\delta Q_A = -1$$

igual a la razón de precios autárquicos para las mercancías agrícolas e industriales (véase Gráfico 3):

1 Esto se debe a que el factor A en las funciones de producción es idéntico: $A_A = A_I = 1$.

Gráfico 3 **La Frontera Lineal**



2. Segundo tipo: frontera cóncava

Ahora se consideran factores cuyo rendimiento es diferente en cada sector de la economía -relativamente especializados-, es decir, α diferente de b. Las funciones de producción podrían ser:

$$Q_A = N^{0.75}_A * K^{0.25}_A$$

$$Q_I = N^{0.6}_I * K^{0.4}_I$$

Y considerando la misma dotación de factores, (N, K) = (4000, 2000). La línea de Pareto quedaría así:

$$K_A = 300*N_A / (1200-0.15*N_A)$$

Al utilizar el mismo procedimiento se asignan valores a N_A y se despejan K_A, N_I, K_I, Q_A, Q_I. Y al graficar los pares (Q_A, Q_I) para obtener la curva de posibilidades de producción. Algunos puntos -Primero los Extremos- son:

Punto 1 $Q_A(N,K) = 3363.5857$

$Q_I(0,0) = 0$

Punto 2 $Q_A(0,0) = 0$

$Q_I(N,K) = 3031.4331$

Punto 3 $Q_A(3000,1200) = 2385.8122$

$Q_I\ (1000,800) = 914.6101$

Punto 4 $Q_A(2000,666.66667) = 1519.6714$

$Q_I(2000,1333.3333) = 1700.566$

Punto 5 $Q_A(1000,285.71429) = 731.11045$

$Q_I(3000,1714.2857) = 2398.314$

La gráfica de éstos sugiere la forma de una parábola cuya ecuación general es:

$Y = A + CX + DX^2$.

Se sabe que para hallar el valor de los parámetros A, C, D basta con disponer de tres de los puntos que la conforman. Si se toman los tres primeros se tendrá el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = A + C*3363.5857 + D*(3363.5857)^2 \qquad \text{(I)}$$

$$3031.4331 = A \qquad \text{(II)}$$

$$914.6101 = A + C*2385.8122 + D*(2385.8122)^2 \qquad \text{(III)}$$

Al ser resuelto da:

A = 3031.4331...

C = -0.8531042...

D = -0.0000143...

Por tanto, la ecuación sería:

$$Q_I = 3031.4331 - 0.8531042{*}Q_A - 0.0000143{*}Q_A^2 \quad (15)$$

En otros términos puede expresarse:

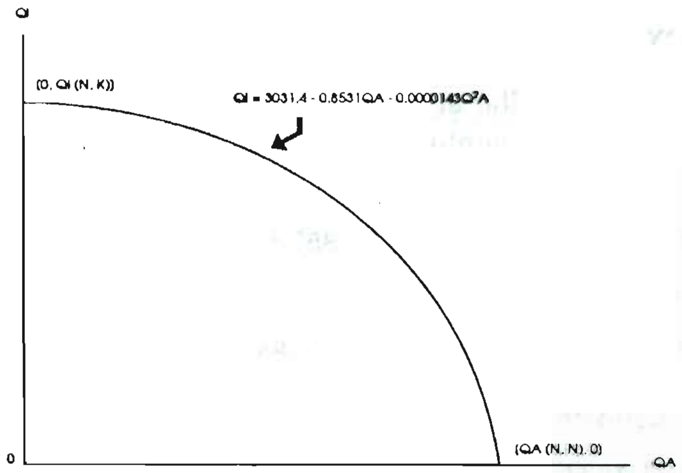
$$Q_I = Q_I(N, K)^* -0.8531042{*}Q_A - 0.0000143{*}Q_A^2 \quad (15^*)$$

con una Tasa Marginal de Transformación -TMT-

$$TMT = -0.8531042 -0.0000286{*}Q_A \quad (16)$$

Como se ve, además de negativa es creciente su valor absoluto en Q_A; reseñando así el problema del costo de oportunidad creciente, "el sacrificio en unidades producidas de la industria necesario para liberar los recursos -hay pleno empleo de ellos- necesarios para producir una unidad adicional de la agricultura, es cada vez mayor, a medida que aumenta Q_A".[2] Así, entonces, al graficar 15 = 15* se tiene:[3]

Gráfico 4 **La Frontera Cóncava**



2 Recuerde que TMT = $\delta Q_I/\delta Q_A$.

3 Nuevamente $Q_I(N, K)$ es el máximo Q_I.

Dado que los interceptos corresponden a $Q_A(N, K)$ y $Q_I(N, K)$, es evidente que un incremento en la cantidad disponible de N y/o de K, desplaza hacia arriba y hacia la derecha la frontera.

Ahora, el parámetro A en la función de Cobb-Douglas $\{Q = A^*N^{\alpha *}K^{(1-\alpha)}\}$, se ha considerado unitario, pero si se permite que su valor aumente es obvio que los interceptos

$$[A_1 N^{\alpha}{}_A K^{(1-\alpha)}{}_A, 0] \text{ y } [0, A_2 N^{b}{}_I K^{(1-b)}{}_I]$$

se desplacen moviendo la frontera hacia arriba y hacia la derecha. Con lo anterior se ilustra el impacto sobre la curva de transformación de los cambios técnicos neutrales. A su vez, se pensaría que el modelo puede facilitar la comprensión de algunas controversias en el ámbito de la teoría del comercio internacional (véase Anexo A).

II. Segunda parte

A. Aplicación a la teoría del comercio internacional

En los cursos de economía internacional, en la parte correspondiente al comercio, se discuten las ventajas que ofrece dicho proceso a los países partícipes. La discusión se circunscribe básicamente a comparar el equilibrio en autarquía -sin comercio internacional- con el equilibrio del país cuando se abren sus fronteras a los flujos de exportaciones e importaciones.

En el modelo generalmente se consideran las siguientes premisas:

1. El país dispone de una dotación inicial de factores, N y K.

2. Se conoce la tecnología en los distintos sectores de la economía, definidas como funciones de producción homogéneas de grado uno.

3. Pleno empleo de los recursos, móviles entre sectores pero no entre países.

4. País pequeño: ello implica una actitud pasiva -Price Taker-[4] frente a la razón foránea de precios o términos de intercambio.

5. Una función de bienestar social para describir el sistema de preferencia de la "población" -las del dictador- respecto de los dos bienes producidos y comercializados.

6. El producto a generar es sustituto perfecto del importado.

7. La comunidad pretende alcanzar, bajo las condiciones señaladas, la canasta de consumo que le permita maximizar su bienestar; es decir, la Tasa Marginal de Transformación (TMT) es igual a la Tasa Marginal de Sustitución social (TMSs).

8. Es necesario añadir esta: la moneda doméstica es idéntica a la del resto del mundo, es decir, la tasa de cambio es unitaria.

Ahora, con base en el modelo especificado y con la ayuda de la función Cobb-Douglas se realiza el trabajo considerando los dos tipos de frontera: lineal y cóncava.

B. Frontera lineal: autarquía

Supóngase la dotación de factores así:

$N = 5.000$

$K = 2.000$

y la tecnología para los dos sectores agrícola e industrial es:

$Qa = 0.75 * Na^{0.6} * Ka^{0.4}$

$Qi = 0.5 * Ni^{0.6} * Ki^{0.4}$

---

4 Léase *Tomador de Precios.*

De la información anterior se tendría la siguiente línea de Pareto:

1. Ka = 0.4 Na; recuerde que Ka = K / W * Na; la frontera sería entonces:[5]

2. $Qi = 1732.86 - 2/3\ Qa$

donde TMT = -2/3

y suponiendo la función de bienestar social dada por:

3. $Us = Qa^{0.45} * Qi^{0.55}$ nuevamenta del tipo Cobb-Douglas

donde:

Us = Nivel de bienestar social

Qa = Cantidad consumida del bien agrícola

Qi = Cantidad consumida del bien industrial

El problema de la "comunidad" es entonces:

MAX: $Us = Qa^{0.45} * Qi^{0.55}$

S.A: $Qi = 1732.86 - 2/3\ Qa$

que se puede manejar construyendo el lagrangiano y operándolo, o manejando la sencilla idea de que la frontera no es más que la restricción presupuestal de la comunidad, es decir, la descripción formal de su Producto Interno Bruto, así;

PIB = PaQa + PiQi

En este caso quedaría:

5 Aplicando la metodología ya conocida.

$$1732.86 = \frac{2^*(Qa)}{3} + 1^*Qt.$$

Al llegar aquí es necesario aplicar las formas reducidas o demandas marshallianas para encontrar la cesta de consumo. Esto es:

$$Qa = 0.45 * \frac{1732,86}{2/3} = 1169.6806$$ [6]

$$Qi = 0.55 * 1732.86/1 = 953.07304$$

e implica, reemplazando en 3, un nivel de bienestar social:

$$Uo = 1045.08$$

Estos valores definen el equilibrio en autarquía.

La economía, llámese también comunidad, produce y consume la canasta (A,I) = (1169.68, 953.07) y alcanza un bienestar máximo de Us = 1045.08 -ordinal-.

Se observa que

$$TMS = \frac{\alpha\, Qi}{(1-\alpha)Qa} = \frac{0.45 * 953.07}{0.55 * 1169.68}$$

$$= TMT = 2/3 = 0.66666 = Pa/Pi$$

lo que garantiza la tangencia entre la curva isobienestar social y la frontera de posibilidades de producción.

C. Frontera lineal: apertura comercial

Pero, ¿qué pasa con la apertura comercial? Supóngase que al presentarse, la razón foránea de precios definida como

6 Recuerde: $Qa = \frac{\alpha M}{Pa}$ ecuación (4) primer problema.

F = Pa/pi = 1. Evaluemos las ventajas.

1. Ventajas en el consumo: se refieren las alcanzadas por la economía cuando no puede reasignar -no tiene la oportunidad- sus recursos; en este caso, se limita a valorar su PIB real, la canasta inicial producida, a los nuevos precios: Pa = 1, Pi = 1 y decidir sobre su nueva canasta de consumo lo cual implica definir su balanza comercial. Esto es;

Nuevo PIB = 1 * (1169.68 + 953.07) = 2122.75 (mayor que el anterior).

Nueva canasta de consumo: $$Qa^{7*} = \frac{0.45 * 2122.75}{1} = 955.24$$

$$Qi^{8*} = \frac{0.55 * 2122.75}{1} = 1167.51$$

y su nuevo nivel de bienestar: U* = 1066,7 mayor que el anterior.

Pero, obsérvese que la canasta de consumo difiere de la canasta que produce la economía. Estableciendo la diferencia determinamos el triángulo de comercio, exportaciones e importaciones. Veamos:

a. El país produce 1169,68 unidades de producto agrícola y consume 955.24 unidades del mismo; es decir, exporta la diferencia 1169,68 - 955,24 = 214.44 unidades.

b. El país produce 953.07 unidades de producto industrial y consume 1167.51 unidades del mismo, es decir, importa la diferencia: 1167,51-953.07 = 214.44 unidades, o sea que la balanza comercial está en equilibrio, bajo el supuesto: los precios son unitarios.

---

7 Recordemos que la condición es TMT = TMS = Pa/Pi.

8 Recordemos que la condición es TMT = TMS = Pa/Pi.

En el Gráfico 6 se puede apreciar que la economía pasa del punto E_0 al punto E_1.

2. Ventajas en la producción: se presentan cuando la economía puede reasignar los recursos para maximizar su PIB. En este caso se sabe que la canasta para maximizar el PIB corresponde a un extremo de la frontera; ello implica la especialización plena de la economía, en este caso en agricultura; es decir, el sistema no produciría bien industrial. Veamos:

Si la economía destina la totalidad de sus recursos al sector agrícola su producto sería:

Qa =2.599.29 y, por tanto su PIB = 1 * 2599.29 = 2599,2932, en esta situación mayor que los anteriores.

La nueva canasta de consumo sería entonces;

Qa^{**} = 1169,6819

Qi^{**} = 1429,6113

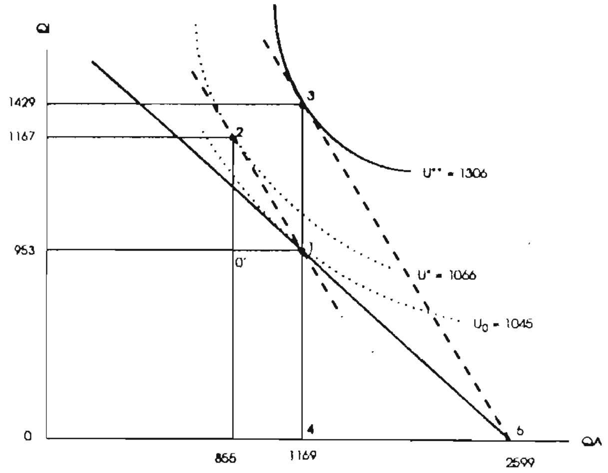
y el nuevo nivel de bienestar social

U^{**} = 1306, superior -preferido- a los anteriores; la balanza comercial se establecería en la forma anteriormente definida.

a. El país consume 1169,6819 unidades ($) de mercancía agrícola y se produce 2599.29, se colige que exporta la diferencia de 1429,6113.

b. El consumo de mercancía industrial 1429,6113 corresponde en su totalidad a importaciones dado que no la produce; entonces, nuevamente la balanza comercial está en equilibrio y además se observa que $TMS = \frac{0.45*1429,6113}{0.55*1169,6819} = 1 =$ Pa/Pi, diferente a TMT = 2/3 = 0.66, es decir, no se cumplen todas las condiciones "normalmente" consideradas (véase Gráfico 6).

Gráfico 6 **Las ventajas del Comercio Internacional: Caso de la Frontera Lineal**



donde se distinguen los tres puntos de equilibrio: 1 en autarquía, 2 con apertura comercial -ilustra las ventajas en el consumo y el triángulo de comercio -0, 1, 2-; 3 apertura comercial con especialización -ilustra las ventajas en la producción y el triángulo comercial 3, 4, 5- (véase Anexo B).

D. El caso de los costos crecientes: la frontera cóncava

1. En una economía autárquica

Para considerar esta situación basta considerar, bajo las condiciones anteriores, la posibilidad de producción con factores relativamente especializados; es decir, las funciones de producción podrían ser:

$Qa = 0.75\ Na^{0.6} * Ka^{0.4}$ y

$Qi = 0.5\ Ni^{0.5} * Ki^{0.5}$

al recurrir a la línea de Pareto se tiene:

$$Ka = \frac{(1 - \alpha)\, b\, K\, Na}{\alpha(1\text{-}b)\, W + (b - \alpha)Na} \quad , \qquad W = N$$

Entonces:

$$Ka = \frac{400\ Na}{(1500\text{-}0.1Na)}$$

De esta manera, usando el método ya conocido, se llega a la ecuación de la frontera:[9]

$$Q1 = 1581.1388 - 0.5958435Qa - 0.0000047Qa^2$$

donde:

$$TMT = \frac{\delta Qi}{\delta Qa} - 0.5958435 - 0.0000094Qa$$

es decir, la tasa marginal de transformación es creciente, en términos absolutos en A, aspecto que garantiza la concavidad; además

$$\frac{\delta^2 Qi}{\delta Qa^2} = -0.0000094 \text{ menor } 0$$

Nuevamente, para hallar el equilibrio autárquico se puede plantear el problema y construir el lagrangiano o, simplemente, igualar las tasas marginales de sustitución social -TMSs-, es decir la pendiente de la isobienestar y la tasa marginal de transformación -TMT-, entendida como la pendiente de la frontera de posibilidades de producción.

---

9 El lector puede ejercitarse hallándola.

Dado que:

$Us = Qa^{0.45} * Qi^{0.55}$

entonces,

$$TMSs = -0.81818181 \frac{Qi,}{Q_A} \quad \text{, de TMS} = \frac{\alpha Qi}{(1-\alpha)\ Qa} = \frac{dQi}{dQ_A}$$

entonces, igualando TMSs y TMT queda:

$$-0.81818181 \frac{Qi,}{Q_A} = -0.5958435 - 0.0000094\ Qa$$

de donde sale la ecuación de segundo grado

$$0.0000161Qa^2 + 1.3240966\ Qa - 1581.1388 = 0$$

al utilizar la fórmula general $X = \dfrac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

se obtiene que: $Q^*a = 1177.2741$

Al reemplazar en la frontera se tiene

$QI^* = 873.1536$ con una TMT = TMS = 0.6068241 y un nivel de bienestar social = Us = 998,83735.

2. En una economía abierta

A partir de este numeral se presenta dos supuestos importantes: primero la economía es abierta y segundo, la razón foránea de precios es:

$$\frac{Pfa}{Pfi} = 0.615, \text{ distinto de } 0.606824, \frac{Pa}{Pi} \text{ en autarquía.}$$

En este caso las ventajas del comercio exterior se definen así:

a. Ventajas en el consumo: considerando los precios internacionales:

Pa = 0.615 y Pi = 1,

el PIB sería:

PIB = 0.615 * 1177.2741 + 1 * 873.1536. Es decir,

PIB = 1597.1772 (el anterior era 1587.55)

mientras la nueva canasta de consumo sería:

Qa^{**} = 1168.6662 y

Qi^{**} = 878.44746

y el bienestar social Us^{*} = 998.8595 mayor que el anterior.

Obsérvese la balanza comercial:

Exportaciones: 8,6079 unidades del bien agrícola a $0.615 cada una; que reportan $5.293860.

Importaciones: 5.29386 unidades de producto industrial con un costo de $5.29386, o sea, nuevamente la balanza comercial está equilibrada (véase Gráfico 7).

b. Ventajas en la producción: la búsqueda de estas requiere encontrar, la nueva canasta que produce la economía, para ello basta igualar la TMT a la nueva razón de precios.

-0615 = -0.5958435 -0.0000094Qa

de donde:

Qa^{***} = 2037,9255

reemplazando en la frontera se tiene:

$Qi^{***} = 347,33438$

Entonces el nuevo PIB sería:

PIB = 1600.6586

La nueva canasta de consumo:

$Qa^{e} = 1171.2136$ y

$Qi^{e} = 880.36223$

lo que implica un nuevo nivel de bienestar: $Us^{**} = 1001,0367$

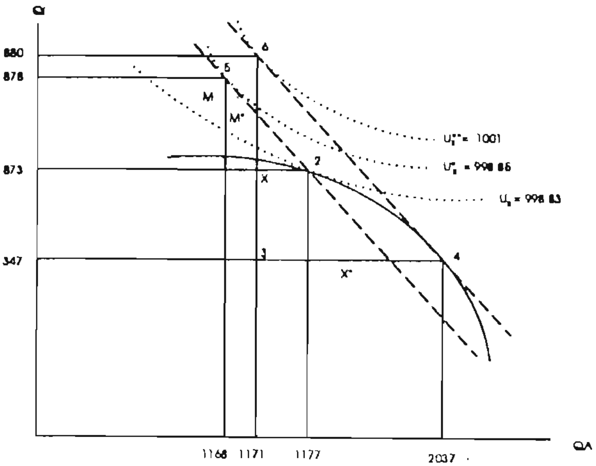
mayor que los anteriores y donde $TMSs = TMT = \frac{Pa}{Pi} = \frac{0.615}{1}$

En lo anterior se puede observar:

Las exportaciones: 866,7119 unidades de bien agrícola que reportan $533.02782.

Las importaciones: 533,02785 unidades de bien industrial con un costo de $533,02785; lo anterior muestra una balanza comercial nuevamente en equilibrio (véase Gráfico 7 y Anexo C).

Gráfico 7 **Las ventajas del Comercio Internacional: Caso de la Frontera Cóncava**



ANEXOS

Anexo A

1. Si usted observa el modelo, particularmente cuando $\alpha = b$ (frontera lineal), encuentra que, en última instancia, la pendiente de la frontera será unitaria, mayor o menor que la unidad, en la medida en que el factor A en la función de producción sea igual para ambos sectores, $A_{\text{industria}} > A_{\text{agricultura}}$ o $A_{\text{industria}} < A_{\text{agricultura}}$, respectivamente (véanse gráficos 5_A, 5_B y 5_C).

Gráfico 5A Frontera Lineal con Tasa Marginal de Transformación Unitaria

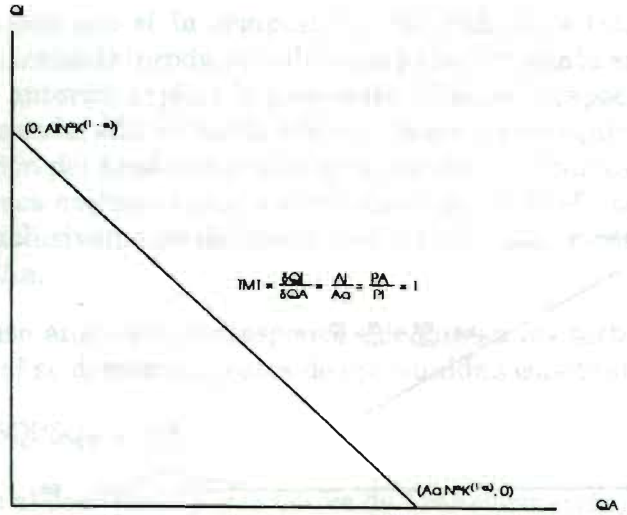


Gráfico 5B Frontera Lineal con Tasa Marginal de Transformación mayor que uno

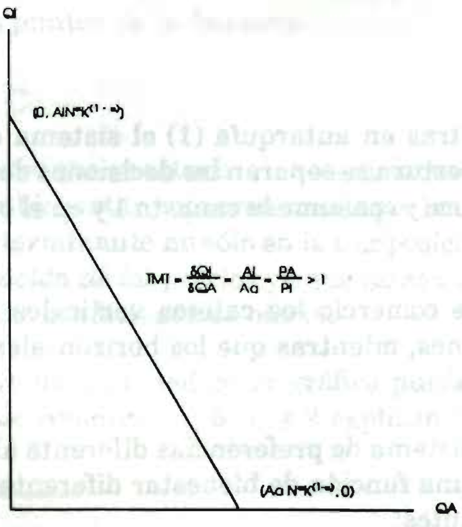
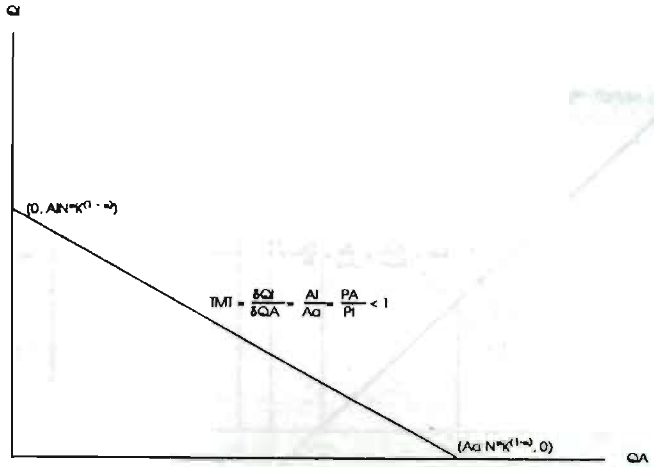


Gráfico 5C **Frontera Lineal con Tasa Marginal de Transformación menor que uno**



2. La aproximación en los resultados está explicada por el redondeo en los coeficientes.

Anexo B

1. Obsérvese que mientras en autarquía (1) el sistema consume la canasta que produce, con apertura se separan las decisiones de producción y consumo: en un caso produce y consume la canasta 1 y en el otro produce la 2 y consume la 3.

2. En los triángulos de comercio los catetos verticales 0, 2 y 3, 4 representan las importaciones, mientras que los horizontales 0, 1 y 4, 5 muestran las exportaciones.

3. Obsérvese como un sistema de preferencias diferente al considerado; es decir, si se muestra una función de bienestar diferente con curvas isobienestar de perfil diferentes:

a. No tendrá ningún efecto sobre la razón de precios autárquicos, ésta seguiría siendo Pa/Pi = 2/3.

b. Afectaría eso sí la composición del PIB, más (menos) producto agrícola, menos (más) producto industrial y obviamente la asignación de los recursos; lo anterior explica la propuesta "Clásica" respecto al papel que juega la demanda: ella no incide sobre los precios autárquicos pero sí sobre la composición del producto y la asignación de los recursos, quedando los precios ligados exclusivamente a las condiciones de oferta. En este caso dependen exclusivamente del factor A en la función de producción, es decir: Pa/Pi = Ai/Aa.

c. El caso analizado corresponde a lo que en los textos de economía internacional se denomina costos de oportunidad constantes, dado que

$$TMT = \delta Qi/\delta Qa = 2/3$$

e indica que al deslizarse por la Curva de Transformación, se observa que el país para incrementar el producto agrícola en una unidad se ve abocado a sacrificar 2/3 de unidad de producto industrial y, así, liberar los recursos necesarios[10] para cumplir su cometido. Tal sacrificio permanece constante en todos los puntos de la frontera.

Anexo C

1. Observe que en este caso las condiciones de demanda, explicadas por la función de bienestar y concretamente por las curvas isobienestar, juegan un papel determinante no sólo en la composición del PIB, sino *también en la determinación de los precios* ya que *no son* un fenómeno ligado exclusivamente a las condiciones de oferta.

2. Nuevamente usted en la gráfica puede distinguir claramente los triángulos de comercio: el 5, 1, y 2 explican las ventajas en el consumo,

10 Dado el pleno empleo.

cuyas exportaciones aparecen en el cateto horizontal y las importaciones en el otro: el 6, 3, y 4 explican las ventajas en la producción.

3. Observe que aunque el sistema reasigna recursos en respuesta a la apertura no se especializa totalmente, a diferencia del caso de frontera lineal antes analizado.

4. A su vez, permite considerar aspectos de política comercial, digamos el establecimiento de un arancel a la importación de un bien industrial y analizar el impacto sobre la producción, la balanza comercial y el bienestar.